欧氏空间上的光滑函数

解析函数

作为微分几何中的约定俗成，我们将坐标记为上标，而非下标.

定义. 对于非负整数 k, 我们称一个函数 $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 C^k 的, 如果其满足对于任意的 $j < k$, $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \cdots x^{i_j}}$ 都在 p 点存在并且连续.
称函数 $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ 在点 p 是 C^∞ 的，如果对于所有的 $k \geq 0$ 都满足其是 C^k 的话.
另外，称一个函数 f 是 C^k 的，如果它在 U 上每个点都是 C^k 的话. 同时，C^∞ 的同义词是 “光滑的”

我们称一个函数 $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ 是**实解析**的, 如果对于 U 中任意一个点 p, 都存在一些邻域, 使得其满足

$$f(x) = f(p) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\left(x^i - p^i\right) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\left(x^i - p^i\right)\left(x^j - p^j\right) + \cdots$$

引理. 实解析函数一定是 C^∞ 的，因为上面的式子可以在其收敛区域内逐项微分. 但 C^∞ 函数则不一定是实解析的.

例. 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$
由于原点处的任意阶导数 $f^{(k)}(0)$ 都是 0，f 在原点处的任意邻域都是 0，因此 $f(x)$ 不等于其泰勒级数且 $f(x)$ 在原点处不是实解析的.

含余项的泰勒定理

虽然 C^∞ 的函数不一定等价泰勒定理，但可以通过添加余项来使其满足目的.

定义. （星型）
对于 $\mathbb{R}^n$ 的子集 S，称 S 是相对于 p 星型的，如果 S 中的任意一点 x 都满足 p 到 x 的线段被包含在 S 里.

引理. （含余项的 Taylor 定理）
令 f 是一个定义在 $U \subset \mathbb{R}$ 的 C^∞ 函数，满足其关于 $p := \left(p^1, \cdots, p^n\right) \in U$. 那么存在一些定义在 U 上的 C^∞ 函数 $g_1(x), \cdots, g_n(x)$，使得

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n \left(x^i - p^i\right) g_i(x), g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

Proof. 由于 U 是关于 p 星型的，所以对于 $\forall x \in U$，线段 $p + t(x-p), 0 \leq t \leq 1$ 在 U 内部.
那么考虑 $f(p + t(x-p)), t \in (0,1)$
由链式法则可知，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p + t(x-p)) = \sum \left(x^i - p^i\right) \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x-p))$
接着两边同时对 t 从 0 到 1 积分, $f(p + t(x-p))|_0^1 = \sum \left(x^i - p^i\right) \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x-p))\,\mathrm{d}t$
在这里我们令 $g_i(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x-p))\,\mathrm{d}t$，于是 $g_i(x)$ 是 C^∞
且原式变为 $f(x) - f(p) = \sum \left(x^i - p^i\right) g_i(x)$
另一方面，$g_i(p) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\,\mathrm{d}t = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ □

注意. 事实上，星型并非限制条件，考虑任意一个开球 $B(p, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < \epsilon\}$ 是关于 p 的星型. 如果 f 是定义在包含点 p 的开集 U 上的 C^∞ 函数，那么存在一个 $\epsilon > 0$，使得 $p \in B(p, \epsilon) \subset U$. 于是 f 定义在一个 p 的星型邻域上，并且适用含有余项的泰勒定理.

欧氏空间中作为导数的切向量

为了区分点和向量，我们将定义在 $\mathbb{R}^n$ 的点记作 $p = \left(p^1, \cdots, p^n\right)$

切空间中的向量 $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$ 记作 $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$ or $\langle v^1, \cdots, v^n \rangle$.

我们通常用 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 来表示 $\mathbb{R}^n$ 或 $T_p\mathbb{R}^n$ 的标准基，于是 $v=\sum v^i e_i$.
过点 $p=\left(p^1,\cdots,p^n\right)$ 的具有方向 $v=\langle v_1,\cdots,v_n\rangle\in\mathbb{R}^n$ 的直线具有参数化 $c(t)=\left(p^1+tv^1,\cdots,p^n+tv^n\right)$.

方向导数

f 在 p 上 v 方向的方向导数定义为

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_v f &= \lim_{t\to 0}\frac{f(c(t))-f(p)}{t}\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f(c(t))\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}c^i}{\mathrm{d}t}(0)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\\
&=\sum_{i=1}^{n}v^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)
\end{aligned}$$

显然可以看出，$\mathrm{D}_v f$ 是一个数字.

芽

定义在集合 S 上的关系 R 是 $S\times S$ 的子集. 我们称这个关系是一个等价关系如果它同时满足以下条件:
(1) 自反性: $x\sim x$ 对于任意的 $x\in S$
(2) 对称性: $x\sim y\Rightarrow y\sim x$
(3) 传递性: $x\sim y, y\sim z\Rightarrow x\sim z$
考虑所有 (f,U) 对所组成的集合，这里 U 是 p 的一个邻域并且 $f:U\to\mathbb{R}$ 是 C^∞ 的. 我们称 (f,U) 等价于 (g,V) 如果存在一个包含 p 的开集 $W\subset U\cap V$ 使得 $f=g$ 当其关于 W 的时候.

定义. 称 (f,U) 的等价类为 f 在 p 的芽 (germ).

某一点的导数

一个域 K 上定义在向量空间之间的映射 $L:V\longrightarrow W$ 称作线性映射或线性算子，如果对于所有的 $r\in K, u,v\in V$ 有:
(1) $L(u+v)=L(u)+L(v)$
(2) $L(rv)=rL(v)$
对于每个 $p\in\mathbb{R}^n$ 的切向量，p 的方向导数给出了一个实向量空间的映射 $\mathrm{D}_v: C_p^\infty\longrightarrow\mathbb{R}$.
于是 D_v 是一个 $\mathbb{R}$-线性的，并且满足 $\mathrm{D}_v(fg)=(\mathrm{D}_v f)\,g(p)+f(p)\,\mathrm{D}_v g$.
将 p 的所有导数所构成的集合记作 $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$. 显然这个集合是一个实向量空间.
由于 p 的所有方向导数都是在这点的导数，因此存在一个映射

$$\begin{aligned}
\phi: T_p(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)\\
v &\longmapsto \mathrm{D}_v=\sum v^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p
\end{aligned}$$

由于 D_v 是线性的，因此映射 ϕ 是一个向量空间的线性算子.

引理. 如果 D 是 C_p^∞ 的某一点的导数，那么对于所有的常函数 c，有 $\mathrm{D}(c)=0$

Proof. 由于 $\mathbb{R}-$ 线性，我们有 $\mathrm{D}(c)=c\mathrm{D}(1)$.
于是考虑 Leibniz，$\mathrm{D}(1)=\mathrm{D}(1\times 1)=\mathrm{D}(1)\times 1+1\times\mathrm{D}(1)=2\mathrm{D}(1)$
因此 $\mathrm{D}(1)=0$ □

定理. 线性映射 $\phi: T_p(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ 是向量空间的一个同构.

Proof. 单射性方面，对于 $v\in T_p(\mathbb{R}^n)$，令 $\mathrm{D}_v=0$. 将 D_v 作用于坐标函数 x^j，得到

$$0=\mathrm{D}_v\left(x^j\right)=\sum_i v^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p x^j=\sum_i v^i\delta_i^j=v^j$$

因此，$v=0$ 且 ϕ 是单射.
满射性方面，令 D 是点 p 处的导数，令 (f,V) 的等价类为 C_p^∞ 上的芽.
不妨假设 V 是一个开球，于是其为星型.
由带余项的泰勒定理，存在一些 C^∞ 的函数 $g_i(x)$ 在 p 的邻域上，使得

$$f(x)=f(p)+\sum\left(x^i-p^i\right)g_i(x),g_i(x)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

将 D 作用在两边，记 $\mathrm{D}(f(p))=0,\mathrm{D}\left(p^i\right)=0$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}f(x)&=\sum\left(\mathrm{D}x^i\right)g_i(p)+\sum\left(p^i-p^i\right)\mathrm{D}g_i(x)\\&=\sum\left(\mathrm{D}x^i\right)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\end{aligned}$$

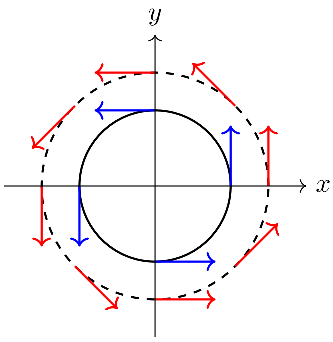
这就证明了对于 $v=\langle\mathrm{D}x^1,\cdots,\mathrm{D}x^n\rangle,\mathrm{D}=\mathrm{D}_v$ □

换句话说，这个定理证明了我们可以通过 p 点处的导数来识别其切向量. 在 $T_p(\mathbb{R}^n)\simeq\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ 下，$T_p(\mathbb{R}^n)$ 的基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 对应到偏导的集合 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p\right\}$
因此我们可以将 $v=\langle v^1,\cdots,v^n\rangle=\sum v^ie_i$ 写作 $v=\sum v^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$

向量场

一个定义在开集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 的向量场 X 是一个分配给 U 中所有点 p 的切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 的切向量 X_p. 由于切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 有基底 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right\}$，于是向量 X_p 是一个线性结合 $X_p=\sum a^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,p\in U$
向量场 X 是 U 上 C^∞ 的，如果其系数 a^i 全都是 U 上 C^∞ 的

例. 显然，在 $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ 上，$p:=(x,y)$ 的一个向量场如图



一个 U 上的 C^∞ 函数的环通常被记作$C^\infty(U)$ 或者 $\mathcal{F}(U)$. 由于可以将 C^∞ 向量场作用在 C^∞ 函数上从而得到一个新的 C^∞ 向量场，将 U 上所有的 C^∞ 向量场记作$\mathfrak{X}(U)$. $\mathfrak{X}$ 不仅是 $\mathbb{R}$ 上的一个向量空间，同时也是C^∞ 环上的一个模.

定义. 如果 R 是一个有单位元的交换环，那么 $R-$ 模是一个具有加法和标量乘法的操作的集合 A，使得:
(1) 在加法下，A 是一个阿贝尔群 (可交换)
(2) 对于 $r,s\in R$ 和 $a,b\in A$,
(i) (封闭性) $ra\in A$
(ii) (单位元) 如果 1 是 R 的乘法单位元的话，$1a=a$
(iii) (结合律) $(rs)a=r(sa)$
(iv) (分配律) $(r+s)a=ra+sa,r(a+b)=ra+rb$

向量场作为导数

A 的所有导数关于加法和乘法是封闭的，并且形成一个向量空间，记作 $\mathrm{Der}(A)$，于是我们有一个映射

$$\begin{aligned}\phi:\mathfrak{X}(U)&\longrightarrow\mathrm{Der}\left(C^\infty(U)\right)\\X&\longmapsto(f\mapsto Xf)\end{aligned}$$

交错 $k-$ 线性函数

对偶空间

如果 V,W 是实向量空间，我们记 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 为所有线性映射 $f:V\longrightarrow W$. 我们称 V 上所有实值线性函数所构成的向量空间为对偶空间 V^*. 换言之，$V^*=\mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$
V^* 的元素称之为 V 上的共向量/余向量
假设 V 是一个有限维的向量空间，令 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的基底. 于是每个 $v\in V$ 都有唯一的线性结合 $v=\sum v^ie_i, v^i\in\mathbb{R}$. 令 $\alpha^i:V\longrightarrow\mathbb{R}$ 是一个选取第 i 个坐标的线性函数，$\alpha^i(v)=v^i$. 注意到

$$\alpha^i(e_j)=\delta^i_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

命题. 函数 $\alpha^1,\cdots,\alpha^n$ 构成了 V^* 的一组基底

推论. 有限维向量空间 V 的对偶空间 V^* 与 V 拥有相同维度

多重线性函数

函数 $f:V^k\longrightarrow\mathbb{R}$ 是一个 $k-$ 线性，如果其中每个参数都有

$$f(\cdots,av+bw,\cdots)=af(\cdots,v,\cdots)+bf(\cdots,w,\cdots)$$

而一个 V 上的 $k-$ 线性函数同时也被叫做 V 上的$k-$ 张量

定义. 一个 $k-$ 线性函数 $f:V^k\longrightarrow\mathbb{R}$ 是对称的，如果

$$f\left(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}\right)=f(v_1,\cdots,v_k)$$

称其为交替的，如果

$$f\left(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}\right)=(\mathrm{sgn}\,\sigma)f(v_1,\cdots,v_k)$$

$k-$ 线性函数的置换操作

引理. 如果 σ,τ 是 S_k 的排列，f 是 V 上的一个 $k-$ 线性函数，那么 $\tau(\sigma f)=(\tau\sigma)f$

注意. 只需要考虑 $w_i=v_{\tau(i)}$

定义. 对于一个群 G 和一个集合 X，考虑映射

$$\begin{aligned}G\times X&\longrightarrow X\\ (\sigma,x)&\longmapsto\sigma\cdot x\end{aligned}$$

我们称这个映射是群 G 在集合 X 上的左作用，如果

(i) $1\cdot x=x$，这里 1 是 G 的单位元，x 是 X 的任意一个元

(ii) $\tau\cdot(\sigma\cdot x)=(\tau\sigma)\cdot x$

那么类似的，我们称其为右作用，如果满足

(i) $x\cdot 1=x$

(ii) $(x\cdot\sigma)\cdot\tau=x\cdot(\sigma\tau)$

对称算子和交错算子

定义. 对称算子:

$$(Sf)(v_1,\cdots,v_k)=\sum_{\sigma\in S_k}f\left(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)}\right)$$
$$Sf=\sum_{\sigma\in S_k}\sigma f$$

交错算子:

$$Af=\sum_{\sigma\in S_k}(\mathrm{sgn}\sigma)\,\sigma f$$

张量积

定义. 向量空间 V 上的 (k,l) 型张量是一个多重线性映射 $T: V_1^* \times \cdots \times V_k^* \times V_1 \times \cdots \times V_l \to \mathbb{R}$

定义. 令 f 和 g 分别是向量空间 V 上的 $k-$ 线性函数和 $l-$ 线性函数. 那么他们的张量积 $f \otimes g$ 是一个 $(k+l)-$ 线性函数，定义为

$$(f \otimes g)(v_1, \cdots, v_{k+l}) = f(v_1, \cdots, v_k)\, g(v_{k+1}, \cdots, v_{k+l})$$

例.

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \sum_i v^i w^i \\ &= \sum_i \alpha^i(v)\, \alpha^i(w) \\ &= \sum_i \left(\alpha^i \otimes \alpha^i\right)(v, w) \end{aligned}$$

例.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \\ a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 \end{bmatrix}$$

例. 克罗内克积

$$U \otimes V = \begin{bmatrix} u_{11}V & u_{12}V & \cdots \\ u_{21}V & u_{22}V & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

命题. $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$

楔积

定义. 对于 $f \in A_k(V), g \in A_l(V)$

$$\begin{aligned} f \wedge g &= \frac{1}{k!l!} A(f \otimes g) \\ (f \wedge g)(v_1, \cdots, v_{k+l}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma)\, f\left(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}\right) g\left(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+l)}\right) \end{aligned}$$

楔积的反交换性

命题. 对于 $f \in A_k(V), g \in A_l(V)$

$$f \wedge g = (-1)^{kl}\, g \wedge f$$

Proof. 记变换 $\tau \in S_{k+l}$ 为变换 $\tau = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & l & l+1 & \cdots & l+k \\ k+1 & \cdots & k+l & 1 & \cdots & k \end{bmatrix}$
换言之，$\tau(1) = k+1, \cdots, \tau(l) = k+l, \tau(l+1) = 1, \cdots, \tau(l+k) = k$
于是

$$\begin{aligned} \sigma(1) = \sigma\tau(l+1), \cdots, \sigma(k) = \sigma\tau(l+k) \\ \sigma(k+1) = \sigma\tau(1), \cdots, \sigma(k+l) = \sigma\tau(l) \end{aligned}$$

那么对于 $v_1, \cdots, v_{k+l} \in V$

$$\begin{aligned} A(f \otimes g)(v_1, \cdots, v_{k+l}) &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma)\, f\left(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}\right) g\left(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+l)}\right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma)\, f\left(v_{\sigma\tau(l+1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(l+k)}\right) g\left(v_{\sigma\tau(1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(l)}\right) \\ &= (\operatorname{sgn}\tau) \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn}\sigma\tau)\, g\left(v_{\sigma\tau(1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(l)}\right) f\left(v_{\sigma\tau(l+1)}, \cdots, v_{\sigma\tau(l+k)}\right) \\ &= (\operatorname{sgn}\tau)\, A(g \otimes f)(v_1, \cdots, v_{k+l}) \end{aligned}$$

于是在两边同时除以 $k!l!$ 就得到了 $f\wedge g=(\mathrm{sgn}\tau)\, g\wedge f$ □

推论. 如果 f 是 V 上的一个 $k-$ 共向量，且 k 是奇数，那么 $f\wedge f=0$

楔积的结合律

引理. 令 f,g 分别是一个 $k-$ 线性函数和 $l-$ 线性函数，那么

(i) $A(A(f)\otimes g)=k!A(f\otimes g)$

(ii) $A(f\otimes A(g))=l!A(f\otimes g)$

命题. $(f\wedge g)\wedge h=f\wedge(g\wedge h)$

Proof.

$$
\begin{aligned}
(f\wedge g)\wedge h&=\frac{1}{(k+l)!m!}A((f\wedge g)\otimes h)\\
&=\frac{1}{(k+l)!m!}\frac{1}{k!l!}A(A(f\otimes g)\otimes h)\\
&=\frac{(k+l)!}{(k+l)!m!k!l!}A((f\otimes g)\otimes h)\\
&=\frac{1}{k!l!m!}A((f\otimes g)\otimes h)\\
&=\frac{1}{k!l!m!}A(f\otimes(g\otimes h))\\
&=\frac{1}{k!(l+m)!}A\left(f\otimes\frac{1}{l!m!}A(g\otimes h)\right)\\
&=f\wedge(g\wedge h)
\end{aligned}
$$

□

推论. $f\wedge g\wedge h=\dfrac{1}{k!l!m!}A(f\otimes g\otimes h)$

推论. $f_i\in A_{d_i}(V)$

$$
f_1\wedge\cdots\wedge f_r=\frac{1}{d_1!\cdots d_r!}A(f_1\otimes\cdots\otimes f_r)
$$

$\mathbb{R}^n$ 上的微分形式

微分 1− 形式

p 点在 $\mathbb{R}^n$ 上的余切空间 $T_p^*(\mathbb{R}^n)$ 被定义为切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间 $(T_p\mathbb{R}^n)^*$. 类似于向量场的定义，一个开集 $U\subset\mathbb{R}^n$余向量场或微分 1− 形式ω 是一个给每个 $p\in U$ 分配一个余向量 $\omega_p\in T_p^*(\mathbb{R}^n)$ 的函数.

命题. 如果 $x^1,\cdots,x^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准基底，那么对于每个 $p\in\mathbb{R}^n$，$\left\{(dx^1)_p,\cdots,(dx^n)_p\right\}$ 都是对偶于以 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p,\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right\}$ 为基底的切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 的余切空间 $T_p^*(\mathbb{R}^n)$ 的基底

Proof.

$$
\begin{aligned}
(dx^i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right)&=\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p x^i\\
&=\delta^i_j
\end{aligned}
$$

□

微分 $k-$ 形式

更一般的，考虑在 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上的一个 k 阶的微分形式 ω 或一个 $k-$ 形式，这是一个分配给每个 $p\in U$ 一个切空间 $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ 上交错 $k-$ 线性函数的函数. 换言之，$\omega_p\in A_k\left(T_p\mathbb{R}^n\right)$.
而 $A_k\left(T_p\mathbb{R}^n\right)$ 的基底是 $dx_p^I=dx_p^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_p^{i_k},1\leq i_1\leq\cdots\leq i_k\leq n$
因此，对于每个 $p\in U$，ω_p 都是线性结合 $\sum a_I\left(p\right)dx_p^I$
而一个 $k-$ 形式 ω 是线性结合 $\omega=\sum a_I dx^I$ 记 U 上的 C^∞ 的 $k-$ 形式构成的向量空间为 $\Omega^k\left(U\right)$
一个 $0-$ 形式分配给了每个 $p\in U$ 一个 $A_0\left(T_p\mathbb{R}^n\right)=\mathbb{R}$ 的元素
因此 $0-$ 形式是 U 上的一个单纯的函数，并且 $\Omega^0\left(U\right)=C^\infty\left(U\right)$
由于可以将 C^∞ 函数乘在 C^∞ 的 $k-$ 形式上，因此集合 $\Omega^k\left(U\right)$ 既是一个 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，也是一个 $C^\infty\left(U\right)$ 上的模
将楔积作为乘法的话，直和 $\Omega^*\left(U\right)=\oplus_{k=0}^n\Omega^k\left(U\right)$ 既是一个 $\mathbb{R}$ 上的代数，也是 C^∞ 上的一个模. 另外作为一个代数，它实际上是反对称的和满足结合律的.

向量场上作为多线性函数的微分形式

对于 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 的 $1-$ 形式 ω 和 C^∞ 向量场 X，按如下方式定义一个 U 上的函数

$$\omega\left(X\right)_p=\omega_p\left(X_p\right)$$

如果用坐标写的话

$$\omega=\sum a_i dx^i\qquad X=\sum b^j\frac{\partial}{\partial x^j}$$

因此

$$\omega\left(X\right)=\left(\sum a_i dx^i\right)\left(\sum b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum a_i b_i$$

U 上的 C^∞ 的 $1-$ 形式给出了一个映射：$\mathfrak{X}\left(U\right)\longrightarrow C^\infty\left(U\right)$. 由于 $f\in C^\infty\left(U\right)\Rightarrow\omega\left(fX\right)=f\omega\left(X\right)$，这个映射实际上是环 $C^\infty\left(U\right)$ 上的线性.
而在这种方式下，U 上的 $1-$ 形式给出了一个 $\mathcal{F}\left(U\right)-$ 映射：$\mathfrak{X}\left(U\right)\longrightarrow\mathcal{F}\left(U\right)$
类似的，一个 U 上的 $k-$ 形式给出了一个 $\mathcal{F}\left(U\right)$ 上的 $k-$ 线性映射：$\mathfrak{X}\left(U\right)\times\cdots\times\mathfrak{X}\left(U\right)$(k 个)$\longrightarrow\mathcal{F}\left(U\right)$

外导数

定义. 如果 $\omega=\sum_I a_I\mathrm{d}x^I\in\Omega^k\left(U\right)$，那么

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\sum_I\mathrm{d}a_I\wedge\mathrm{d}x^I\\&=\sum_I\left(\sum_j\frac{\partial a_I}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\right)\wedge\mathrm{d}x^I\\&\in\Omega^{k+1}\left(U\right)\end{aligned}$$

例. 令 ω 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个 $1-$ 形式 $f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y$，同时 f,g 是 $\mathbb{R}^2$ 的 C^∞ 函数.
另一方面，为了方便，记 $f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x},f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}$. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}y\\&=\left(f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}x+\left(g_x\mathrm{d}x+g_y\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}y\\&=\left(g_x-f_x\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}$$

域 K 上的一个代数 A 是已分次的 (be graded)，如果其可以写成 K 上的向量空间的直和 $A=\oplus_{k=0}^\infty A^k$

定义. 令 $A=\oplus_{k=0}^\infty A^k$ 是域 K 上的已分次的代数，那么分次代数 A 的反微分是一个 $K-$ 线性映射 $D:A\longrightarrow A$ 使得对于 $\omega\in A^k,\tau\in A^l$

$$\mathrm{D}\left(\omega\tau\right)=\left(\mathrm{D}\omega\right)\tau+\left(-1\right)^k\omega\mathrm{D}\tau$$

如果反微分从 A^k 映射到 A^{k+m} 的话，我们称这是个 m 阶的反微分

命题. (i) 外导数 $d:\Omega^*(U)\longrightarrow\Omega^*(U)$ 是一个 1 阶的反微分：

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\tau)=(\mathrm{d}\omega)\wedge\tau+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge\mathrm{d}\tau$$

(ii) $\mathrm{d}^2=0$
(iii) 如果 $f\in C^\infty(U), X\in\mathfrak{X}(U)$，那么 $(\mathrm{d}f)(X)=Xf$

命题. 外微分的特征
由于上面的命题可以知道，如果 $\mathrm{D}:\Omega^*(U)\longrightarrow\Omega^*(U)$ 是一个一阶的外微分，满足 $\mathrm{D}^2=0$，对于 $f\in C^\infty(U), X\in\mathfrak{X}(U)$，有 $(\mathrm{D}f)(X)=Xf$，那么 $\mathrm{D}=\mathrm{d}$

闭形式和恰当形式

定义. U 上的一个 $k-$ 形式 ω 是闭的，如果它满足 $\mathrm{d}\omega=0$
称其是恰当的，如果存在一个 $k-1$ 形式 τ 满使得 $\omega=\mathrm{d}\tau$

由于 $\mathrm{d}^2=0$，每个恰当形式都是闭的

一点例子

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\simeq"'] & \Omega^1(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\simeq"'] & \Omega^2(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\simeq"] & \Omega^3(U) \arrow[d, "\simeq"] \\
C^\infty(U) \arrow[r, "\mathrm{grad}"'] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathrm{curl}"'] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathrm{div}"'] & C^\infty(U)
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$\longrightarrow$ 于是 $0-$ 形式 f 的外微分 $\mathrm{grad}f=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{bmatrix}$

$1-$ 形式的外微分

$$\mathrm{d}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z)=(R_y-Q_z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-(R_x-P_z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(Q_x-P_y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$\longrightarrow \mathrm{curl}\begin{bmatrix}P\\Q\\R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_y-Q_z\\-(R_x-P_z)\\Q_x-P_y\end{bmatrix}$

$2-$ 形式的外微分

$$\mathrm{d}(P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=(P_x+Q_y+R_z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$\longrightarrow \mathrm{div}\begin{bmatrix}P\\Q\\R\end{bmatrix}=P_x+Q_y+R_z$

由于是否为保守场仅和拓扑性质有关，那么我们可以用向量空间的商来定义闭形式的“失败程度”

$$H^k(U):=\frac{U\text{ 上的 }k-\text{ 闭形式}}{U\text{ 上的 }k-\text{ 恰当形式}}$$

我们将这个称作 U 的 k 阶 De Rham 上同调

关于上标下标的一些约定

对于向量场，通常用下标如 $e_1, \cdots, c_n$
对于微分形式，通常采用上标如 $\omega^1, \cdots, \omega^n$
对于 0− 形式，坐标函数用上标如 $x^1, \cdots, x^n$
他们的微分 1− 形式也是上标，如 $\mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^n$
而坐标向量场 $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}$ 则一般用下标，因为其存在于分母
而对于系数部分的上下标，通常取决于其为向量场的系数还是微分形式的系数
如 $X = \sum a^i e_i$，$\omega = \sum b_j \mathrm{d}x^j$
比如，对于 $e_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

$$\begin{aligned}\omega(X) &= \left(\sum b_j \mathrm{d}x^j\right)\left(\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= \sum b_i a^i\end{aligned}$$

或者 $X = \sum a^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

$$a^i = \left(\mathrm{d}x^i\right)(X)$$

注意到等号两边的净指标相等，净指标为 0 是“守恒的”.

流形

拓扑流形

定义. 一个拓扑空间 M 是 n 维局部欧几里得的，如果 M 的每个点 p 都有一个邻域 U 满足 U 有一个映射到 $\mathbb{R}^n$ 的开子集的同胚 ϕ. 我们称 $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n)$ 为一个图表，称 U 为一个坐标邻域或者坐标开集，称 ϕ 为 U 的一个坐标映射或者坐标系. 我们称一个图表 (U, ϕ) 是以 $p \in U$ 为中心的，如果 $\phi(p) = 0$.

定义. 一个 n 维的拓扑流形是一个 Hausdorff，第二可数（A2），局部欧几里得的 n 维空间

相容图表

定义. 一个拓扑流形的两个图表 $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n), (V, \psi : V \to \mathbb{R}^n)$ 是 $C^\infty-$ 相容的，如果两个映射 $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V), \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ 是 C^∞ 的. 这两个映射是过渡映射.

定义. 一个局部欧几里得空间 M 的 C^∞ 图册是一组覆盖了 M 的 C^∞ 相容图表的集合. 换句话说，$M = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$.

虽然 C^∞ 相容图是自反和对称的，但是却不一定是传递的.
考虑 $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ 是 $C^\infty-$ 相容的，$(U_2, \phi_2), (U_3, \phi_3)$ 也是 $C^\infty-$ 相容的. 那么由于三个都包含的坐标映射只在 U_{123} 被定义，因此 $\phi_3 \circ \phi_1^{-1} = \left(\phi_3 \circ \phi_2^{-1}\right) \circ \left(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}\right)$ 仅在 $\phi_1(U_{123})$ 是 $C^\infty-$ 相容的

光滑流形

一个局部欧几里得空间上的图册 $\mathfrak{U}$ 称作最大的，如果不存在一个更大的图册包含它. 换言之，如果 $\mathfrak{M}$ 是另外一个包含 $\mathfrak{U}$ 的图册的话，$\mathfrak{M} = \mathfrak{U}$.

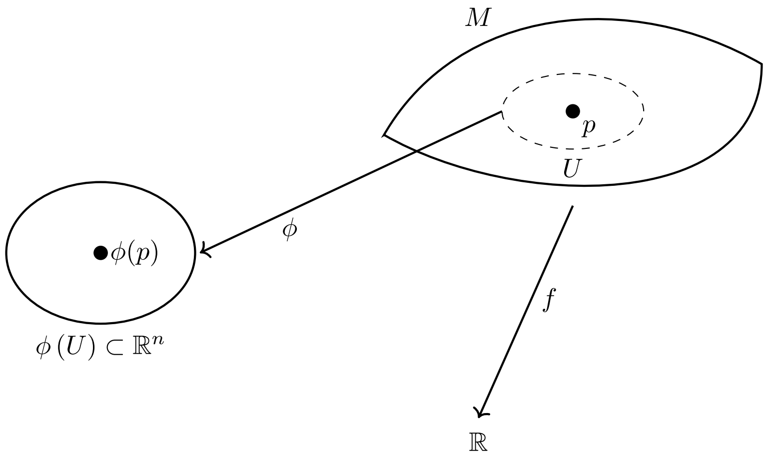
定义. 光滑流形或 C^∞ 流形是一个具有最大图册的拓扑流形 M. 这个最大图册也叫 M 的微分结构. 一个微分流形的维度是 n，如果其所有的连通分支都具有维度 n

命题. 局部欧几里得空间上任意的图册 $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 都被包含在唯一的最大图册里.

综上所述，我们验证一个拓扑空间 M 是否是一个 C^∞ 流形，只需要确认：
(i) M 是 Hausdorff，A2 的
(ii) M 有一个 C^∞ 图册（无须是最大的）

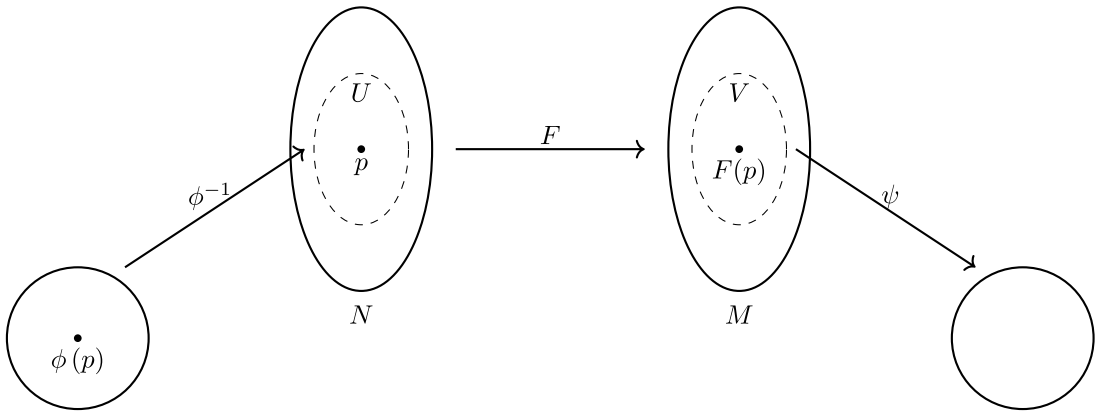
流形上的光滑映射

定义. 令 M 是一个 n 维的光滑流形. 称一个函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 在 M 上的点 p 是 C^∞ 的或者光滑的，如果存在一个在 M 的图册里的包含 p 的图 (U, ϕ)，使得 $f \circ \phi^{-1}$ 在 $\phi(p)$ 是 C^∞ 的.



定义. 令 $F: N \to M$ 的一个映射而 h 是 M 上的一个函数. 那么 h 由 F 的拉回记作 F^*h，定义为 $F^*h := h \circ F$

定义. 令 N, M 分别是 n, m 维的流形，我们称一个映射 $F: N \to M$ 在 N 的点 p 是 C^∞ 的，如果存在包含 $F(p)$ 的 M 的图 (V, ψ) 和包含 p 的 N 的图 (U, ϕ)，满足一个 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的复合映射 $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ 在 $\phi(p)$ 是 C^∞ 的.



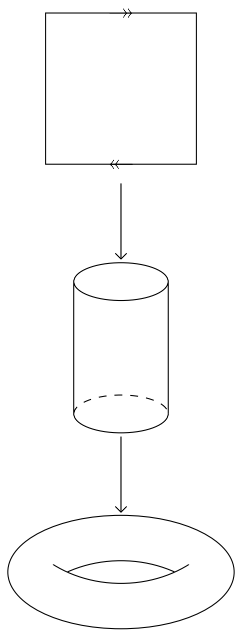
定义. 如果 F 是一个双射，且 F, F^{-1} 都是 C^∞ 的话，我们称 F 为一个微分同胚.

命题. 令 U 是流形 M 的一个开集，如果映射 $F: U \to \mathbb{R}^n$ 是其像上的一个微分同胚，那么 (U, F) 是 M 的图册中的一个图

定义. 一个李群是指一个拥有群结构的光滑流形 G，满足以下映射都是 C^∞ 的：
1. $\mu: G \times G \to G$
2. $\iota: G \to G, \iota(x) = x^{-1}$

商

我们可以通过粘合一个正方形来得到一个环面，这个过程被称为等化，或商构造



商空间上映射的连续性

令 $\sim$ 是拓扑空间 S 上的一个等价关系，$S/\sim$ 是商拓扑.
假设函数 $f: S \to Y$ 在各等价类上都是常值的，于是引导了映射 $\bar{f}([p]) = f(p)$. 换言之，

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ S/\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

命题. 诱导映射 $\bar{f}: S/\sim \to Y$ 是连续的，当且仅当 $f: S \to Y$ 是连续的

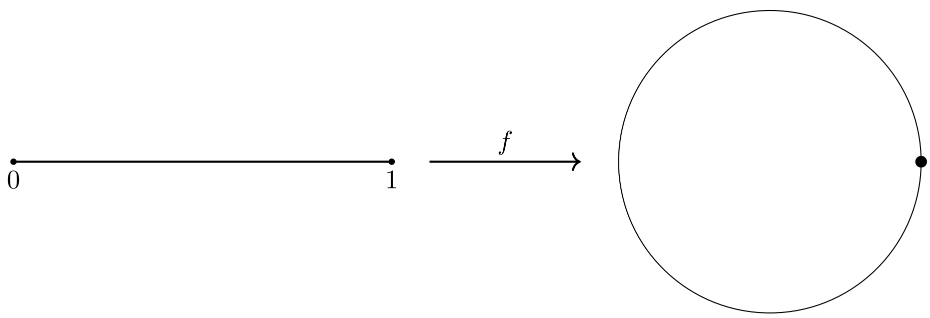
同化为一个点

我们可以通过如下方式将拓扑空间 S 的子空间 A 等化到一个点:
定义一个 S 上的关系 $\sim$:
(i)$x \sim x$，对于所有的 $x \in S$
(ii)$x \sim y$，对于所有的 $x, y \in S$
显然这是 S 上的一个等价关系（第一条给出了自反性）

例. 令 $I := [0,1]$. $I/\sim$ 是通过将 $\{0,1\}$ 同化为一个点之后得到的商空间. 令 S^1 为复平面上的单位圆. 那么

$$\begin{aligned} f: I &\to S^1 \\ x &\mapsto \exp(2\pi i x) \end{aligned}$$

由于 $f(0) = f(1)$，我们可以导出一个函数 $\bar{f}: I/\sim S^1$



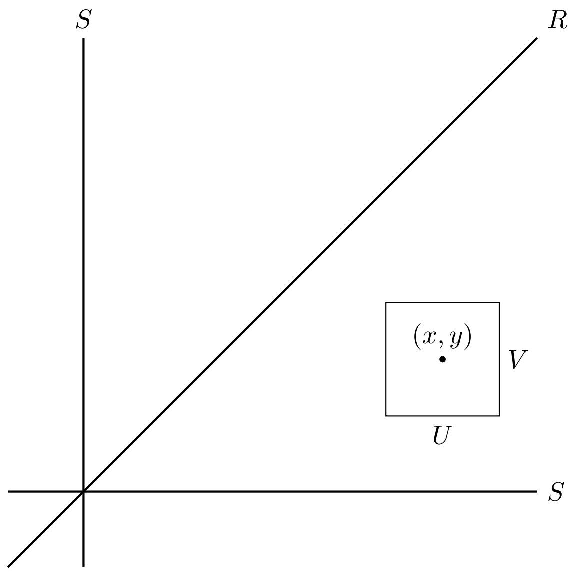
命题. 如果商空间 $S/\sim$ 是 Hausdorff 的，那么 S 的任意一点 p 的等价类 $[p]$ 在 S 上是闭的.

开等价关系

定义. 一个拓扑空间 S 上的等价关系称为开的，如果投影映射 $\pi : S \to S/\sim$ 是开的

换言之，当且仅当 $\forall U \subset S, \pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x\in U}[x]$ 是 S 中的开集的时候，等价关系 $\sim$ 才是开的.

令 $\sim$ 为 S 上的等价关系，我们可以用 $R \subset S \times S$ 来表示定义该关系的集合：$R := \{(x, y) \in S \times S | x \sim y\}$. 我们称这个 R 为等价关系的图.



定理. 令 $\sim$ 是 S 的一个开等价关系. 那么商空间 $S/\sim$ 是 Hausdorff 的，当且仅当等价关系的图 R 在 $S \times S$ 上是闭的.

定理. 令 $\sim$ 是有投影映射 $\pi : S \to S/\sim$ 的空间 S 的一个开等价关系. 如果 $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ 是 S 的基，那么它在 π 下的像 $\{\pi(B_\alpha)\}$ 是 $S/\sim$ 的基.

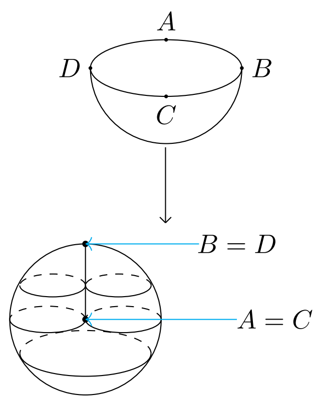
推论. 如果 $\sim$ 是第二可数空间 S 的一个开等价关系，那么商空间 $S/\sim$ 也是第二可数的.

实投影空间

按如下方式定义 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 上的一个等价关系：

$$x \sim y \iff y = tx\,(\forall t \in \mathbb{R} - \{0\})$$

这里 $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. 而实投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 则是由这个等价关系构成的 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 的商空间. 我们将点 $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 的等价类记作 $[a_0, \cdots, a_n]$ 并令 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ 为投影. 我们称这个 $[a_0, \cdots, a_n]$ 为 $\mathbb{R}P^n$ 的齐次坐标.



由上图可知，虽然 $\mathbb{R}P^2$ 虽然不能嵌入为 $\mathbb{R}^3$ 的子流形，但是如果允许自相交的话就可以形成下面这样的图案（但这并非双射）.

命题. $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ 上的等价关系 $\sim$ 在 $\mathbb{R}P^n$ 定义里是开等价关系.

推论. 实投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 是第二可数的.

命题. 实投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 是 Hausdorff 的.

实投影空间上的标准 C^∞ 图册

令 $[a_0.\cdots,a_n]$ 是投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 的齐次坐标. a_0 虽然不是一个 $\mathbb{R}P^n$ 上 well-defined 的函数，但是 $a_0\neq 0$ 是独立于 $[a_0,\cdots,a_n]$ 代表元的选择的. 因此 $a_0\neq 0$ 在 $\mathbb{R}P^n$ 上是有意义的. 我们可以归纳地定义 $\forall i\in\mathbb{N},U_i:=\{[a_0,\cdots,a_n]\in\mathbb{R}P^n|a_i\neq 0\}$. 和：

$$\phi_i:U_i\to\mathbb{R}^n$$
$$[a_0,\cdots,a_n]\mapsto\left(\frac{a_0}{a_i},\cdots,\frac{\hat{a_i}}{a_i},\cdots,\frac{a_n}{a_i}\right)$$

这里 ^ 是指省略该项. 这证明了 $\mathbb{R}P^n$ 是以 (U_i,ϕ_i) 为图表的局部欧几里得的.
在交集 $U_0\cap U_1$ 里，$a_0\neq 0,a_1\neq 0$，于是就有两套坐标系：

$$\begin{tikzcd}
 & {[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n]} \arrow[dl, "\phi_0"'] \arrow[dr, "\phi_1"] & \\
\left(\frac{a_1}{a_0},\frac{a_2}{a_0},\cdots,\frac{a_n}{a_0}\right) & & \left(\frac{a_0}{a_1},\frac{a_2}{a_1},\cdots,\frac{a_n}{a_1}\right)
\end{tikzcd}$$

在 U_0 上，坐标函数为 $x_1,\cdots,x_n$. 在 U_1 上，坐标函数是 $y_1,\cdots,y_n$.
在 U_0，$\forall i\in\mathbb{N},x_i=\dfrac{a_i}{a_0}$. 在 U_1，$y_1=\dfrac{a_0}{a_1},y_2=\dfrac{a_2}{a_1},\cdots,y_n=\dfrac{a_n}{a_1}$
因此 $\phi_1\circ\phi_0^{-1}(x)=\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{x_2}{x_1},\dfrac{x_3}{x_1},\cdots,\dfrac{x_n}{x_1}\right)$
由于在 $\phi_0(U_0\cap U_1)$ 上 $x_1\neq 0$，因此这是个光滑函数. 在其他 $U_i\cap U_j$ 上也可以得到类似式子，因此 $\{(U_i,\phi_i)\}_{i=0,\cdots,n}$ 是 $\mathbb{R}P^n$ 的 C^∞ 图册，称为标准图册. 这就包含了 $\mathbb{R}P^n$ 是光滑流形的证明.

切空间

定义. 流形 M 中点 p 的切向量为其在 p 的方向

定理. 链式法则
如果 $F:N\to M,G:M\to P$ 是流形的光滑映射且 $p\in N$ 的话，有 $(G\circ F)_{*,p}=G_{*,F(p)}\circ F_{*,p}$

推论. 如果 $F:N\to M$ 是流形的一个微分同胚且 $p\in N$，那么 $F_*:T_pN\to T_pM$ 是向量空间的同构

推论. 维数不变性
如果开集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 微分同胚于开集 $V\subset\mathbb{R}^m$，那么 $n=m$.

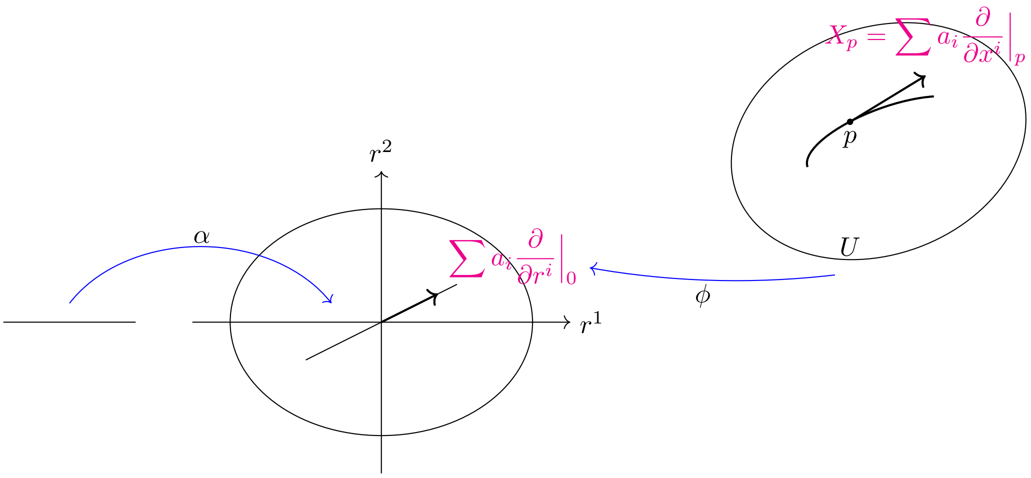
命题. 令 $(U,\phi)=(U,x^1,\cdots,x^n)$ 是一个关于流形 M 中的点 p 的图表，那么 $\phi_*\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)=\dfrac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)}$

命题. 如果 $(U,\phi)=(U,x^1,\cdots,x^n)$ 是一个包含点 p 的图表，那么切空间 T_pM 有基 $\dfrac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p,\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$

命题. 坐标向量变换矩阵
令 $(U,x^1,\cdots,x^n)$ 和 $(V,y^1,\cdots,y^n)$ 是流形 M 的两个坐标图表，那么在 $U\cap V$ 上 $\dfrac{\partial}{\partial x^j}=\sum_i\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\dfrac{\partial}{\partial y^i}$

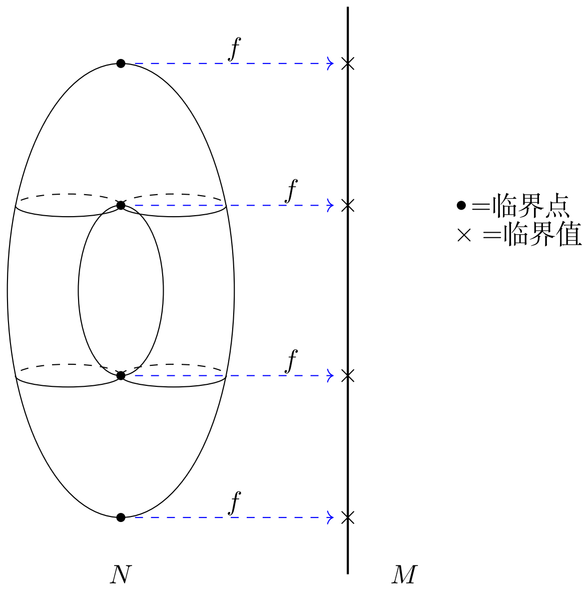
命题. $F: N \to M$ 是流形间的光滑映射，$p \in N$，令 $\left(U, x^1, \cdots, x^n\right)$ 和 $\left(V, y^1, \cdots, y^n\right)$ 是关于 $p \in N$ 和 $F(p) \in M$ 的坐标图表. 关于 T_pN 的基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right\}$ 以及 T_pM 的基 $\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{F(p)}\right\}$, 微分映射 $F_{*,p}: T_p \to T_pM$ 由矩阵 $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j(p)}\right]$ 表示. 这里 $F^i = y^i \circ F$，是第 i 个分量.

命题. 对于流形 M 上所有的点 p，以及所有的切向量 $X_p \in T_pM$，对于 $\epsilon > 0$ 存在一个光滑曲线 $c: (-\epsilon, \epsilon) \to M$ 使得 $c(0) = p$ 且 $c'(0) = X_p$



命题. 令 $F: N \to M$ 是一个流形间的光滑映射，$p \in N$，并且 $X_p \in T_pN$. 如果 c 是一个开始于 $p \in N$ 的，p 点速度 X_p 的曲线，那么有 $F_{*,p}(X_p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_0 F \circ c(t)$.

定义. $p \in N$ 是 f 的临界点，如果其微分 $f_{*,p}: T_pN \to T_{f(p)}M$ 不是满射. 反之，如果这是满射，那么该点为常规点. M 的一个点是临界值，如果其像是临界点，否则其为常规点.



命题. 对于实值函数 $f: M \to \mathbb{R}$，点 $p \in M$ 是临界点，当且仅当关于包含 p 的图表 $\left(U, x^1, \cdots, x^n\right)$，$\forall j \in \mathbb{N}, \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = 0$

子流形

子流形

定义. 一个 n 维的流形 N 的开子集 S 是 k 维正则子流形，如果 $\forall p \in S$，N 的图册中存在一个 p 的坐标邻域 $(U, \phi) = \left(U, x^1, \cdots, x^n\right)$，使得 $U \cap S$ 可以由 $n-k$ 个坐标函数的消失来定义.

我们称 N 的这样一个图表 (U,ϕ) 是相对于 S 的适配图.

定义. 如果 S 是 n 维流形 N 的一个 k 维正则子流形，那么我们称 $n-k$ 为 S 在 N 的余维.

函数的零集

一个映射 $f:N\to M$ 的水平集定义为 $f^{-1}(\{c\})=\{p\in N|f(p)=c\}$ 对于 $c\in M$.

定理. 令 $f:N\to\mathbb{R}$ 是流形 N 的一个 C^∞ 函数. 那么非空正则水平集 $S=f^{-1}(c)$ 是 N 的一个余维为 1 的正则子流形

正则水平集定理

定理. 令 $f:N\to\mathbb{R}^m$ 是 n 维流形 N 上的一个 C^∞ 映射. 那么一个非空正则水平集 $S=f^{-1}(c)$ 是 N 的一个 $n-m$ 维的正则子流形.

定理. 正则水平集定理
令 $f:N\to M$ 是流形间的 C^∞ 映射，并且 $\dim N=n,\dim M=m$，那么一个非空正则水平集 $f^{-1}(c)$ 是维度 $n-m$ 的流形 N 的正则子流形.

范畴与函子

光滑流形的秩

常秩定理

定理. 常秩定理
令 N,M 分别是维度为 n,m 的流形. 设 $f:N\to M$ 在 $p\in N$ 的邻域有常秩 k，那么存在以 $p\in N$ 为中心的图表 (U,ϕ) 和以 $f(p)\in M$ 为中心的 (V,ψ)，使得在 $\phi(p)$ 的邻域，$\psi\circ\phi^{-1}\left(r^1,\cdots,r^n\right)=\left(r^1,\cdots,r^n,0,\cdots,0\right)$

定理. 常值水平集定理
令 $f:N\to M$ 是流形间的光滑映射，$c\in M$. 如果 f 在水平集 $f^{-1}(c)\in N$ 的邻域有常秩 k，那么 $f^{-1}(c)$ 是 N 的一个余维 k 的正则子流形.

浸入与浸没

定义. 一个流形间的光滑映射 $f:N\to M$ 是浸入，如果对于 $\forall p\in N$ 的微分 $f_{*,p}:T_pN\to T_{f(p)}M$ 都是单射. 如果是满射那么被称为浸没.

例. 显然，浸入的一个经典例子是 $\iota\left(x^1,\cdots,x^n\right)=\left(x^1,\cdots,x^n,0,\cdots,0\right)$ 这样的向更高维的拓展. 而浸没的例子则是 $\pi\left(x^1,\cdots,x^m,x^{m+1},\cdots,x^n\right)=\left(x^1,\cdots,x^m\right)$ 这样向更低维的投影.

命题. 令流形 N,M 的维度分别为 n,m. 如果一个光滑映射 $f:N\to M$ 是 $p\in N$ 的一个浸入，那么其在 p 的邻域上有常秩 n. 如果一个光滑映射 $f:N\to M$ 是 $p\in N$ 的一个浸没，那么其在 p 的邻域上有常秩 m.

定理. 令流形 N,M 的维度分别为 n,m.
(i)浸入定理令 $f:N\to M$ 是 $p\in N$ 的一个浸入，那么存在一个以 $p\in N$ 为中心的图表 (U,ϕ) 和以 $f(p)\in M$ 为中心的图表 (V,ψ) 使得在 $\phi(p)$ 的邻域，有

$$\psi\circ f\circ\phi^{-1}\left(r^1,\cdots,r^n\right)=\left(r^1,\cdots,r^n,0,\cdots,0\right)$$

(ii)浸没定理令 $f:N\to M$ 是 $p\in N$ 的一个浸入，那么存在一个以 $p\in N$ 为中心的图表 (U,ϕ) 和以 $f(p)\in M$ 为中心的图表 (V,ψ) 使得在 $\phi(p)$ 的邻域，有

$$\psi\circ f\circ\phi^{-1}\left(r^1,\cdots,r^m,r^{m+1},\cdots,r^n\right)=\left(r^1,\cdots,r^m\right)$$

推论. 一个流形间的浸没 $f:N\to M$ 是一个开映射

光滑映射的像

定理. 如果 $f: N \to M$ 是一个嵌入，那么其像 $f(N)$ 是 M 的一个正则子流形.

定理. 如果 N 是 M 的一个正则子流形，那么包含映射 $\iota: N \to M, \iota(p) = p$ 是一个嵌入

光滑映射到子流形

定理. 令 $F: N \to M$ 是 C^∞ 的，F 的像在 $S \subset M$ 中. 如果 S 是 M 的一个正则子流形，那么诱导映射 $F: N \to S$ 是 C^∞ 的.

切丛

切丛的拓扑

令 $TU = \bigsqcup_{p \in U} T_pU = \bigsqcup_{p \in U} T_pM$

引理. 令 U, V 是 M 上的一个坐标开集. 如果 A 在 TU 上是开的，B 在 TV 上是开的，那么 $A \cap B$ 在 $T(U \cap V)$ 上是开的.

引理. 流形 M 包含由坐标开集构成的可数基.

命题. 流形 M 的切丛 TM 是第二可数的.

命题. 流形 M 的切丛 TM 是 Hausdorff 的.

切丛上的流形结构

如果 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 是 M 的一个 C^∞ 图册，那么 $\{(TU_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 是 TM 的 C^∞ 图册

向量丛

定义. 给定 $\pi: E \to M$，我们称对于 $\forall p \in M$，逆像 $\pi^{-1} := \pi^{-1}(\{p\})$ 为在 p 点的纤维，记作 E_p.

一个满射的流形间的光滑映射 $\pi: E \to M$ 是 r 阶局部平凡的，如果：
(i) 每个纤维 $\pi^{-1}(p)$ 都是 r 维的向量空间
(ii) 对于每个 $p \in M$，存在 p 的一个开邻域 U 和纤维保持微分同胚 $\phi: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$，使得对于 $\forall q \in U$，该映射将纤维 $\pi^{-1}(p)$ 映射为相应的纤维 $q \times \mathbb{R}^r$ 作为向量空间同构.
$\{U\}$ 作为 M 的一个开覆盖，集合 $\{(U, \phi)\}$ 是 E 的一个局部平凡化，同时 $\{U\}$ 称为对于 E，M 的一个平凡化开集.
一个 C^∞ 的秩 r 的向量丛是 (E, M, π)，包含流形 E, M，和一个 r 阶局部平凡的光滑满射 $\pi: E \to M$，E 是总空间，M 是基空间. 我们也可以称 E 为 M 的向量丛.

截面

定义. 流形 M 上的一个向量场 X 是分配切向量 $X_p \in T_pM$ 到每个 $p \in M$ 的函数. 对于切丛而言，M 上的向量场是切丛 $\pi: TM \to M$ 的一个截面
向量场是光滑的，如果 M 到 TM 的映射是光滑的

凸函数与单位分解

C^∞ 凸函数

定义. 流形 M 上，C^∞ 函数 f 的支集定义为 $\text{supp} f = \overline{\{p \in M | f(p) \neq 0\}}$
$q \in M$ 且 U 为 q 的一个邻域的话，在 p 的凸函数指的是任何一个连续函数 f，它在 q 的邻域里恒为 1，且 $\text{supp} f \subset U$

命题. C^∞ 函数的延拓
假设 f 是一个定义在 $q \in M$ 的邻域 U 的光滑函数，那么存在一个 M 上的光滑函数 $\tilde{f}$ 使得在 q 的更小的邻域内与 f 一致.

单位分解

定义. 如果 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M 的一个有限开覆盖，那么从属于 $\{U_i\}$ 的 C^∞ 单位分解是一组非负的 C^∞ 函数 $\{\rho_i\}_{i\in I}$，满足：
(i) $\sum \rho_i = 1$
(ii) $\mathrm{supp}\rho_i \subset U_i$

定义. 一个流形上的 C^∞ 单位分解是指一组 C^∞ 函数 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得：
(i) $\{\mathrm{supp}\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是局部有限的
(ii) $\sum \rho_\alpha = 1$

单位分解的存在性

引理. 如果 $\rho_1,\cdots,\rho_m$ 是流形 M 上的实值函数，那么 $\mathrm{supp}\left(\sum \rho_i\right) \subset \bigcup \mathrm{supp}\rho_i$

命题. 设 M 是一个紧流形，$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 M 的一个开覆盖，那么存在一个从属于 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的 C^∞ 单位分解 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$

定理. C^∞ 单位分解的存在性
令 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是流形 M 的一个开覆盖
(i) 存在一个带有紧支集的 C^∞ 单位分解 $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$，使得 $\forall k, \mathrm{supp}\phi_k \subset U_\alpha$ 对某些 $\alpha\in A$ 成立
(ii) 若对紧支集无要求，那么存在从属于 $\{U_\alpha\}$ 的 C^∞ 单位分解 $\{\rho_\alpha\}$

向量场

向量场的光滑性

命题. 一个 M 上的向量场 X 是光滑的，当且仅当对于 M 上任意的光滑函数 f，函数 Xf 在 M 上是光滑的

积分曲线

定义. 令 X 是一个流形 M 上的一个光滑向量场，$p\in M$. 开始于 p 的 X 的积分曲线是一个曲线 $c:(a,b)\to M$，定义在开区间 (a,b) 上，满足 $c(0)=p, c'(t)=X_{c(t)}$

定义. 我们称一个积分曲线是极大的，如果其定义域不能扩展到更大的区间

局部流

定理. 令 V 是一个 $\mathbb{R}^n$ 的开集，$p_0\in V$，$f:V\to\mathbb{R}^n$ 是 C^∞ 函数. 那么微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(y), y(0)=p_0$ 有唯一的光滑解 $y:(a(p_0),b(p_0))\to V$，其中 $(a(p_0),b(p_0))$ 是包含 0 的极大区间

定理. 令 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开集，$f:V\to\mathbb{R}^n$ 是 V 上一个光滑函数. 对于每个 $p_0\in V$，存在 $p_0\in V$ 的一个邻域 W，$\epsilon>0$，和一个光滑函数 $y:(-\epsilon,\epsilon)\times W\to V$，使得对于 $\forall(t,q)\in(-\epsilon,\epsilon)\times W$，$\dfrac{\partial y}{\partial t}(t,q)=f(y(t,q)), y(0,q)=q$

定义. 一个关于光滑流形上的开集 U 中的点 p 的局部流是一个光滑函数 $F:(-\epsilon,\epsilon)\times W\to U$，这里 ϵ 是正实数，W 是 $p\in U$ 的一个邻域，使得 $F_t(q)=F(t,q)$ 的话，有：
(i) $F_0(q)=q$，对于 $\forall q\in W$
(ii) $F_t(F_s(q))=F_{t+s}(q)$ 如果两边都被定义的话

李括号

假设 X,Y 是定义在流形 M 的开子集 U 上的两个光滑向量场，将其视为作用在 $C^\infty(U)$ 的导子. 对于 $C^\infty(U)$ 中的函数 f，Yf 是 U 上的 C^∞ 函数，定义为 $(XY)f:=X(Yf)$ 的函数同样是 U 上的 C^∞ 函

数.
对于 $f,g\in C^{\infty}(U)$，有

$$\begin{aligned} XY(fg) &= X((Yf)g+fYg) \\ &= (XYf)g+(Yf)(Xg)+(Xf)(Yg)+f(XYg) \end{aligned}$$

使 XY 不为导子的 $(Yf)(Xg),(Xf)(Yg)$ 是对称的. 于是我们只需要对 $XY(fg)$ 和 $YX(fg)$ 作差即可消掉，从而得到 $XY-YX$ 是 $C^{\infty}(U)$ 的导子.
给定两个定义在 U 上的光滑向量场 X,Y，$p\in U$，定义它们之间的李括号为

$$[X,Y]_p f=(X_pY-Y_pX)f$$

这里 f 是 p 点任意 C^{∞} 函数的芽.

命题. 如果 X,Y 是 M 上光滑的向量场的话，$[X,y]$ 在 M 上也是光滑的

例. Jacobi 恒等式
$\sum\limits_{cyc}[X,[Y,Z]]=0$

定义. 李代数是一个实向量空间 V，配有括积计算 $[,]:V\times V\to V$，对于 $\forall a,b\in\mathbb{R}^n,X,Y,Z\in V$，满足以下性质：
(i) 双线性：

$$\begin{aligned} [aX+bY,Z] &= a[X,Z]+b[Y,Z] \\ [Z,aX+bY] &= a[Z,X]+b[Z,Y] \end{aligned}$$

(ii) 反交换性：

$$[Y,X]=-[X,Y]$$

(iii)Jacobi 恒等式：

$$\sum_{cyc}[X,[Y,Z]]=0$$

定义. 一个李代数 V 的导子是一个线性映射 $D:V\to V$ 满足：

$$D[Y,Z]=[DY,Z]+[Y,DZ]$$

相关向量场

定义. 令 $F:N\to M$ 是流形间的光滑映射，一个 N 上的向量场 X 是 $F-$ 相关于 M 上的向量场 $\widetilde{X}$，如果对 $\forall p\in N,F_{*,p}(X_p)=\widetilde{X}_{F(p)}$

命题. N 上的向量场 X 和 M 上的向量场 $\widetilde{X}$ 是 $F-$ 相关的，当且仅当

$$\forall g\in C^{\infty}(M),X(g\circ F)=\left(\widetilde{X}g\right)\circ F$$

命题. 令 $F:N\to M$ 是流形间的光滑映射. 如果 N 上的光滑向量场 X,Y 是 $F-$ 相关于 M 上的光滑向量场 $\widetilde{X},\widetilde{Y}$. 那么 $[X,Y]$ 是 $F-$ 相关于 $\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right]$ 的

李群

李群的例子

定义. 李群是指一个 C^{∞} 流形 G 在是一个群的同时，满足以下运算是 C^{∞} 的：

$$\begin{aligned} \mu:G\times G\to G,\mu(a,b)=ab \\ \iota:G\to G,\iota(a)=a^{-1} \end{aligned}$$

子李群

定义. 李群 G 的子李群是满足以下条件的抽象子群 H:
(i) H 是一个抽象子群
(ii) H 是通过包含映射定义的浸入子流形
(iii) H 上的群运算是 C^∞ 的

命题. 如果 H 是一个抽象子群和一个李群 G 的正则子流形，那么它是 G 的子李群

定理. 闭子群定理
一个闭的李群的子群是一个嵌入的子李群

矩阵的迹

定义 $n\times n$ 矩阵 X 的迹为 $tr\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}x_{ii}$

引理. (i) $\forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n},tr\left(AB\right)=tr\left(BA\right)$
(ii) $X\in\mathbb{R}^{n\times n},A\in\mathrm{GL}\left(n,\mathbb{R}\right),tr\left(AXA^{-1}\right)=tr\left(X\right)$

命题. 矩阵的迹等于其特征值的总和

命题. $\forall X\in\mathbb{R}^{n\times n},\det\left(e^{X}\right)=e^{trX}$

行列式微分

命题. $\forall X\in\mathbb{R}^{n\times n},\det_{*,I}\left(X\right)=trX$

李代数

命题. 切空间 $T_I\left(SL\left(n,\mathbb{R}\right)\right)$ 是包含所有迹 0 的矩阵的 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的子空间

命题. 一个李群 G 上左不变的向量空间 X 是光滑的

命题. 如果 X,Y 是 G 上的左不变向量场，那么 $[X,Y]$ 也是

命题. 如果 $A,B\in T_eG$ 且 $\widetilde{A},\widetilde{B}$ 是他们生成的左不变向量场，那么 $\left[\widetilde{A},\widetilde{B}\right]=[A,B]^{\sim}$

命题. $A=\sum a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I,B=\sum b_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I\in T_I\left(GL\left(n,\mathbb{R}\right)\right)$
如果 $[A,B]=\left[\widetilde{A},\widetilde{B}\right]_I=\sum c_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big|_I$，那么 $c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}-b_{ik}a_{kj}$

定义. 令 $F:H\to G$ 是李群间的一个光滑映射. 定义 $F_*:L\left(H\right)\to L\left(G\right)$ 为 $F_*\left(\widetilde{A}\right)=\left(F_*A\right)^{\sim},\forall A\in T_eH$

定义. 李群 H,G 的映射 $F:H\to G$ 是李群同态，如果这是个光滑映射且这是个群同态

命题. 如果 $F:H\to G$ 是李群同态，$A\in T_eJ$ 是在 H 的单位 e 处的切向量，那么 G 上的左不变向量场 $F_*\widetilde{A}$ 是 $F-$ 相关于 H 上的左不变向量场 $\widetilde{A}$

微分 $1-$ 形式

函数的微分

定义. 如果 f 是一个在流形 M 上的光滑的函数，其微分定义为 M 上的 $1-$ 形式使得 $\forall p\in M$ 且 $X_p\in T_pM$ 的话 $\left(\mathrm{d}f\right)_p\left(X_p\right)=X_pf$

命题. 如果 $f:M\to\mathbb{R}$ 是光滑的，那么 $\forall p\in M,X_p\in T_pM$，有 $f_*\left(X_p\right)=\left(\mathrm{d}f\right)_p\left(X_p\right)\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{f(p)}$

微分 $1-$ 形式的局部表示

令 $(U,\phi)=\left(U,x^1,\cdots,x^n\right)$ 是流形 M 上的坐标图，那么微分 $dx^1,\cdots,dx^n$ 是 U 上的 $1-$ 形式

命题. 对于每个 $p\in U$，余向量 $\left(dx^1\right)_p,\cdots,\left(dx^n\right)_p$ 构成了对偶于以 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$ 为基的切空间 T_pM 的余切空间 T_p^*M 的基

外微分

定义. 流形 M 上的外微分/外导数是一个 $\mathbb{R}-$ 线性映射 $D:\Omega^*(M):\to\Omega^*(M)$ 满足：
(i) D 是 1 阶反导数
(ii) $D\circ D=0$
(iii) 如果 f 是光滑函数，X 是流形 M 上的光滑向量场，那么 $(Df)(X)=Xf$

局部算子

定义. 算子 $D:\Omega^*(M)\to\Omega^*(M)$ 被称为是局部的，如果对于 $\forall k\geq 0$，$k-$ 形式 $\omega\in\Omega^k(M)$ 在开集 U 上限制为 0，那么在 U 上有 $D\omega\equiv 0$

命题. 任意 $\Omega^*(M)$ 上的反微分 D 都是局部算子

从局部形式拓展到全局形式

命题. 令 τ 是 M 的一个开集 U 上的光滑微分形式. 对于 $\forall p\in U$，M 上存在一个光滑全局形式 $\tilde{\tau}$ 在 $p\in U$ 的邻域上与 τ 一致

外导数的存在性和唯一性

定向

定向和 $n-$ 余向量

引理. $u_1,\cdots,u_n$ 和 $v_1,\cdots,v_n$ 是向量空间 V 的向量，令 $u_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}v_i,j=1,\cdots,n$，对于实矩阵 $A=[a_{ij}]$. 如果 ω 是一个 V 上的 $n-$ 余向量，那么 $\omega(u_1,\cdots,u_n)=(\det A)\,\omega(v_1,\cdots,v_n)$

流形上的定向

定义. n 维流形 M 是可定向的，如果其有一个光滑的无处消失 (Nowhere-Vanishing) 的 $n-$ 形式

命题. U,V 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集，一个光滑映射 $F:U\to V$ 是保向的，当且仅当 Jacobi 行列式 $\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right]$ 在 U 上每处都是正的

定向与图册

定义. M 上的图册被称作定向的，如果对于图册上任意的两个重叠图 $\left(U,x^1,\cdots,x^n\right)$ 和 $\left(V,y^1,\cdots,y^n\right)$，Jacobi 行列式 $\left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]$ 在 $U\cap V$ 上任意位置都是正的

命题. n 维流形 M 有一个光滑的无处消失的 $n-$ 形式 ω，当且仅当其拥有可定向图册

定义. 流形 M 的两个定向图册 $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ 和 $\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$ 是等价的，如果变换函数

$$\phi_\alpha\circ\psi_\beta^{-1}:\psi_\beta(U_\alpha\cap V_\beta)\to\phi_\alpha(U_\alpha\cap V_\beta)$$

对于所有的 α,β，Jacobi 行列式都是正的

有界流形

区域不变

定义. $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个任意子集，函数 $f : S \to \mathbb{R}^m$ 在 $p \in S$ 是光滑的，如果存在 $p \in \mathbb{R}^n$ 的邻域 U 和光滑函数 $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}^m$ 使得在 $U \cap S$ 上 $\widetilde{f} = f$. 这个函数在 S 上是光滑的如果其在 S 的每个点上都是光滑的

定理. C^∞ 局域不变
令 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开子集，$S \subset \mathbb{R}^n$ 是任意子集，$f : U \to S$ 是微分同胚. 那么 S 在 $\mathbb{R}^n$ 是开的

有界流形

定义. 一个拓扑有界 $n-$ 流形是一个局部 $\mathbb{H}^n$ 的第二可数的 Hausdorff 拓扑空间

维数大于 1 的流形的边界定向

引理. 假设 $n \geq 2$. 令 (U, ϕ) 和 (V, ψ) 是可定向流形 M 的定向图册里的两个图. 假设 $U, V, \partial M$ 有非空交叉，那么过度函数对边界的限制 $B := \phi(U \cap V) \cap \partial\mathbb{H}^n$

$$\psi \circ \phi^{-1}\Big|_B : \phi(U \cap V) \cap \partial\mathbb{H}^n \to \psi(U \cap V) \cap \partial\mathbb{H}^n$$

有正的 Jacobi 行列式

De Rham 上同调

De Rham 上同调

令 $Z^k(M)$ 为流形 M 上所有闭的 $k-$ 形式的向量空间，$B^k(M)$ 为所有恰当的 $k-$ 形式的向量空间. 因为所有的恰当形式都是闭的，于是 $B^k(M)$ 是 $Z^k(M)$ 的子空间

广相

度规张量场

定义. 向量空间 V 上的一个度规 g 是 V 上一个对称、非退化的 $(0,2)$ 型张量. 对称指 $g(v,u)=g(u,v),\forall v,u\in V$, 非退化是指 $g(v,u)=0,\forall u\in V\Rightarrow v=0\in V$

定义. 向量 $u,v\in V$ 是相互正交的, 如果 $g(v,u)=0$.
V 的基底是正交归一的, 如果其满足

$$g_{\mu\nu}=\begin{cases}0 & \mu\neq\nu\\ \pm1 & \mu=\nu\end{cases}$$

因此度规在正交归一基底的分量排成的矩阵是对角矩阵, 且对角元史 $+1$ 或 -1.

定义. 用正交归一基底写成对角矩阵后, 对角元全是 $+1$ 的度规是正定的或是黎曼的, 对角元全为 -1 的度规叫负定的, 其余度规称为不定的. 只有一个对角元为 -1 的不定度规称为洛伦兹的. 对角线之和称为度规的号差

注意. 关于洛伦兹度规, 在一种习惯中, 四维洛伦兹度规的对角元是 $(-1,1,1,1)$, 号差是 $+2$, 而在另外一种习惯中, 采用的是 $(1,-1,-1,-1)$, 号差是 -2. 为了方便采用前者

定义. 带洛伦兹度规 g 的向量空间 V 的元素有三种

$$\begin{cases}g(v,v)>0 & \text{类空向量}\\ g(v,v)=0 & \text{类光向量}\\ g(v,v)<0 & \text{类时向量}\end{cases}$$

而这在号差为 -2 的度规下则是相反的

定义. 流形 M 上对称的、处处非退化的 $(0,2)$ 型张量场称之为度规张量场

而度规场最大的作用就是定义曲线长度. 不妨先考虑最简单的二维欧氏空间, 假设曲线 $C(t)$ 在自然坐标系 $\{x,y\}$ 的参数式为 $x=x(t),y=y(t)$, 那么曲线的线元长的平方 dl^2 为

$$\begin{aligned}dl^2&=dx^2-dy^2\\&=\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]dt^2\\&=\left[\left(T^1\right)^2+\left(T^2\right)^2\right]dt^2\\&=|T|^2dt^2\end{aligned}$$

这里 T 是 $C(t)$ 的切向量, 由上可知, $dl=|T|\,dt$, 那么 $C(t)$ 的线长为 $l=\int|T|\,\mathrm{d}t$.
上述过程可推导到带有正定度规场 g 的任意流形 M 上. 设 $C(t)$ 是 M 上任意 C^1 曲线, T 是其切向量, 那么 $|T|=\sqrt{g(T,T)}$, 线长自然定义为 $l:=\int\sqrt{g(T,T)}\mathrm{d}t$.
对于有洛伦兹度规场 g 的流形 M, 如果该曲线所有的切向量都类空的话, 该曲线为类空曲线, 类似地, 我们可以定义类时曲线和类光曲线. 而由于类时曲线 $g(T,T)<0$, 因此流形 M 上洛伦兹度规场 g 的线长的定义为 $l:=\int\sqrt{|g(T,T)|}\mathrm{d}t,T\equiv\dfrac{\partial}{\partial t}$
由于线长与其参数化无关, 那么当然也和坐标系无关. 但如果其位于坐标系 $\{x^\mu\}$ 的坐标域内的话, 线长也可以借助坐标系来计算

$$\begin{aligned}g(T,T)&=g\left(T^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu},T^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\\&=T^\mu T^\nu g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu},\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\\&=\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\right)g_{\mu\nu}\end{aligned}$$

由于 $ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ 含有度规 g 在所涉及的坐标系的全部分量 $g_{\mu\nu}$，因此可以直接读出度规的全部坐标分量
例如，设二维流形上的度规 g 在坐标系 $\{t,x\}$ 的线元表示为 $ds^2=-xdt^2+dx^2+4dtdx$，那么可以读出，$g_{tt}=-x,g_{xx}=1,g_{tx}=g_{xt}=2$，因此给定线元表达式就等价于给出度规场

定义. 设流形 M 上的度规场是 g，那么 (M,g) 称为广义黎曼空间.
这里 g 正定，称为黎曼空间. 若 g 是洛伦兹，那么叫伪黎曼空间.

下面给两个比较经典的例子，欧氏空间和闵氏空间

定义. 令 $\{x^\mu\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的自然坐标，在 $\mathbb{R}^n$ 上定义的度规张量场 δ 为 $\delta:=\delta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\otimes\mathrm{d}x^\nu$，那么称 $(\mathbb{R}^n,\delta)$ 是欧氏空间，δ 为欧氏度规.

于是我们注意到 δ 在自然坐标系下的对偶坐标基底 $\{dx^\mu\otimes dx^\nu\}$ 的分量是 $\delta\equiv\begin{cases}0 & \mu\neq\nu\\ +1 & \mu=\nu\end{cases}$，因此欧氏度规下的线元表达式是 $ds^2=\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. 若 $n=2$，那么显然 $ds^2=\left(dx^1\right)^2+\left(dx^2\right)^2$. 而由于

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)&=\delta_{\mu\nu}dx^\mu\otimes dx^\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\\&=\delta_{\mu\nu}dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)dx^\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\end{aligned}$$

因此 $\delta\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)=\delta_{\alpha\beta}$.
事实上不止是自然坐标系满足

$$\begin{gathered}x'=x+a\ \ y'=y+b\\ x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha\ \ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha\\ x'=-x\ \ y'=y\\ x'=x\ \ y'=-y\end{gathered}$$

上面的四种方式定义的坐标系也满足，其中前两个分别是平移和旋转，后两种则是反射. 另一方面，$\delta_{\mu\nu}$ 是 δ 在笛卡尔系的分量，其在非笛卡尔系的分量则不是 $\delta_{\mu\nu}$.
欧氏空间是最简单的黎曼空间，而与之相对的最简单的伪黎曼空间闵氏时空里，为了突出四维洛伦兹度规对角化后对角元的 -1，将其所在的行和列记作 0 行 0 列. 对角线的元素记作 $\eta_{\mu\nu}$，即 $\eta_{00}\equiv-1,\eta_{11}\equiv\eta_{22}\equiv\eta_{33}\equiv1$，若是推广到 n 维的话，$\eta_{\mu\nu}\equiv\begin{cases}0 & \mu\neq\nu\\ -1 & \mu=\nu=0\\ +1 & \mu=\nu=1,\cdots,n-1\end{cases}$

定义. 设 $\{x^\mu\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的自然坐标，定义在 $\mathbb{R}^n$ 的度规张量场 η 为 $\eta:=\eta_{\mu\nu}dx^\mu\otimes dx^\nu$，则 $\left(\mathbb{R}^4,\eta\right)$ 是 n 维闵氏空间，η 是闵氏度规

和欧氏空间类似，容易证明 $\eta\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)=\eta_{\alpha\beta}$.
同样的，除了自然坐标系外，我们也注意到

$$\begin{gathered}t'=t+a\ \ x'=x+b\\ t'=t\mathrm{ch}\lambda+x\mathrm{sh}\lambda\ \ x'=t\mathrm{sh}\lambda+x\mathrm{ch}\lambda\\ t'=-t\ \ x'=x\\ t'=t\ \ x'=-x\end{gathered}$$

类似的，第一种是平移，第二种是伪转动，后两种是反射. 且 η 在非洛伦兹坐标基底的分量不等于 $\eta_{\mu\nu}$

抽象指标记号

1. v^a 是向量，上标 a 等价于 $\vec{v}$ 的 $\rightarrow$，因此不会谈及 $a=1$ 之类的问题. ω_a 是对偶向量，T_c^{ab} 代表 $(2,1)$ 型张量. 虽然 v^a 和 v^b 代表相同向量，但在写等式时要注意指标平衡，不能出现 $\alpha u^a+v^b=w^a$ 的情况.

2. 重复上下抽象指标表示对这两个指标求缩并. 如:
$T_a^a = T\left(e^{\mu^*}; e_\mu\right) = T_\mu^\mu, T_a^{ab} = T\left(e^{\mu^*}, \cdot; e_\mu\right), T_b^{ab} = T\left(\cdot, e^{\mu^*}; e_\mu\right)$
3. 张量积记号省略. 例如 $T \in \mathscr{T}_V(2,1), S \in \mathscr{T}_V(1,1)$，那么 $T \otimes S$ 记作 $T_c^{ab} S_e^d$. $\omega \otimes \mu(v,u)$ 既可以写成 $\omega_a \mu_b v^a u^b$ 也可以写成 $\mu_b \omega_a v^a u^b$，由于 $\omega_a \mu_b$ 和 $\mu_b \omega_a$ 的作用对象都是 $v^a u^b$，因此 $\omega_p \mu_b = \mu_b \omega_a$. 换言之代表张量的字母带着自己的抽象指标可以交换，而张量积的不可交换性体现在 $\omega_a \mu_b \neq \omega_b \mu_a$.
4. 在涉及张量的分量时，相应的指标（具体指标）类似于 μ, ν, α, β 则可以被问及 $\mu = 1$ 还是 $\mu = 2$ 这样的问题. 张量在基矢上的展开式 $T = T_\sigma^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{\sigma *}$ 写作 $T_c^{ab} = T_\sigma^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)^b (e^\sigma)_c$.
5. $\nu_a = g_{ab} \nu^b, \omega^a = g^{ab} \omega_b$ 表明，可以用 g_{ab}, g^{ab} 对上下指标做下降，上升处理.

例. 四维闵氏度规 η_{ab} 的抽象指标表达式
按照定义，$\eta_{ab} := \eta_{\mu\nu} (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b$，这里 $\{(dx^\mu)_a\}$ 是洛伦兹坐标系的对偶基底，于是

$$\eta_{ab} = -(dt)_a (dt)_b + (dx)_a (dx)_b + (dy)_a (dy)_b + (dz)_a (dz)_b$$

这与线元表达式 $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ 相对应. 采用球坐标系 $\{t, r, \theta, \phi\}$ 的话，可以得到

$$\eta_{ab} = -(dt)_a (dt)_b + (dr)_a (dr)_b + r^2 (d\theta)_a (d\theta)_b + r^2 \sin^2\theta (d\phi)_a (d\phi)_b$$

这和线元表达式 $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi\right)^2$ 相对应.

在抽象指标记号中，坐标基矢记作 $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$，对偶坐标基矢记作 $(dx^\mu)_a$，用度规 g_{ab} 和 g^{ab} 分别进行降，升指标，得对偶向量 $g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b$ 和向量 $g^{ab}(dx^\mu)_b$. 用 ω_a 简记 $g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b$ 并用对偶向量基矢展开为 $g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b = \omega_\nu (dx^\nu)_a$，两边作用于 $\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\right)^a$ 后得到 $g_{\sigma\mu} = \omega_\sigma$. 因此 $g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b = g_{\mu\nu}(dx^\nu)_a$，类似可得 $g^{ab}(dx^\mu)_b = g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a$
当 $g_{ab} = \delta_{ab}$ 且 $\{x^\mu\}$ 为笛卡尔系的话，有

$$\delta_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^b = (dx^\mu)_a \quad \delta^{ab}(dx^\mu)_b = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a$$

当 $g_{ab} = \eta_{ab}$ 且 $\{x^\mu\}$ 为洛伦兹系的话，

$$\eta_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^b = -\left(dx^0\right)_a \quad \eta_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^b = \left(dx^i\right)_a$$
$$\eta^{ab}\left(dx^0\right)_b = -\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^a \quad \eta^{ab}\left(dx^i\right)_b = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a$$

此时的 i 不是抽象指标而是具体的 $i = 1, 2, 3$
张量的上指标和下指标通常被称作逆变指标和协变指标，相应的，向量 ν^a 和对偶向量 ω_a 分别称为逆变矢量和协变矢量.

定义. $(0,2)$ 型张量 T_{ab} 的对称部分 $T_{(ab)}$ 和反称部分 $T_{[ab]}$ 分别定义为

$$T_{(ab)} := \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba})$$
$$T_{[ab]} := \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba})$$

一般地，$(0,l)$ 型张量 $T_{a_1 \cdots a_l}$ 的对称和反称部分定义为

$$T_{(a_1 \cdots a_l)} := \frac{1}{l!}\sum_\pi T_{a_{\pi(1)} \cdots a_{\pi(l)}}$$
$$T_{[a_1 \cdots a_l]} := \frac{1}{l!}\sum_\pi \delta_\pi T_{a_{\pi(1)} \cdots a_{\pi(l)}}$$

这里 π 是指排列

导数算符

定义. 令 $\mathscr{F}_M(k,l)$ 代表流形 M 上全体 C^∞ 的 (k,l) 型张量场的集合.（函数可以看作 $(0,0)$ 型张量场（标量场），因此 $\mathscr{F}_M(0,0)\equiv\mathscr{F}_M$）. 映射 $\nabla:\mathscr{F}_M(k,l)\to\mathscr{F}_M(k,l+1)$ 称为 M 上的无挠导数算符，如果有：
1. $\nabla_a\left(\alpha T^{b_1\cdots b_k}_{c_1\cdots c_l}+\beta S^{b_1\cdots b_k}_{c_1\cdots c_l}\right)=\alpha\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}_{c_1\cdots c_l}+\beta\nabla_a S^{b_1\cdots b_k}_{c_1\cdots c_l},\forall T^{b_1\cdots b_k}_{c_1\cdots c_l},S^{b_1\cdots b_k}_{c_1\cdots c_l}\in\mathscr{F}_M(k,l),\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
2. $\nabla_a\left(T^{b_1\cdots b_k}_{c_1\cdots c_l}S^{d_1\cdots d_{k'}}_{e_1\cdots e_{l'}}\right)=T^{b_1\cdots b_k}_{c_1\cdots c_l}\nabla_a S^{d_1\cdots d_{k'}}_{e_1\cdots e_{l'}}+S^{d_1\cdots d_{k'}}_{e_1\cdots e_{l'}}\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}_{c_1\cdots c_l}$,
$\forall T^{b_1\cdots b_k}_{c_1\cdots c_l}\in\mathscr{F}_M(k,l),S^{d_1\cdots d_{k'}}_{e_1\cdots e_{l'}}\in\mathscr{F}_M(k',l')$
3. 与缩并可交换顺序
4. $\nu(f)=\nu^a\nabla_a f,\forall f\in\mathscr{F}_M,\nu\in\mathscr{F}_M(1,0)$
5. $\nabla_a\nabla_b f=\nabla_b\nabla_a f,\forall f\in\mathscr{F}_M$

定理. $C^c_{ab}=C^c_{ba}$

我们将与坐标系无关的那些 ∇_a 称为协变导数算符

定义. 设 ∂_a 是 (M,∇_a) 是任给的坐标系的普通导数算符，那么体现 ∇_a 和 ∂_a 的差别的张量场 C^c_{ab} 称为 ∇_a 在该坐标系的克里斯托费尔符号，记作 Γ^c_{ab}

定理. 流形 M 上选定度规场 g_{ab} 后，存在唯一的 ∇_a 使得 $\nabla_a g_{bc}=0$

满足 $\nabla_a g_{bc}=0$ 的 ∇_a 称为与 g_{bc} 适配的导数算符. 那么不难注意到

$$\begin{aligned}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}&=\Gamma^c_{ab}\left(dx^\sigma\right)_c\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b\\&=\frac{1}{2}\left(dx^\sigma\right)_c\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b g^{cd}\left(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{ad}-\partial_d g_{ab}\right)\\&=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(\partial_\mu g_{\nu\rho}+\partial_\nu g_{\mu\rho}-\partial_\rho g_{\mu\nu}\right)\\&=\frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(g_{\nu\rho,\mu}+g_{\mu\rho,\nu}-g_{\mu\nu,\rho}\right)\end{aligned}$$

不妨试着计算克里斯托费尔符号的具体例子.

例. 考虑二维极坐标的线元 $ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$
那么对应的度规张量 $g_{\mu\nu}$ 和逆 $g^{\mu\nu}$ 分别为 $g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&0\\0&r^2\end{pmatrix}$ 和 $g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{r^2}\end{pmatrix}$. 这里 μ,ν 为 r,θ
接着考虑克里斯托费尔符号为 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma}+\partial_\nu g_{\sigma\mu}-\partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)$
由于 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ 的话，需要实际计算的 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 并不很多
1. 对于 $\lambda=r$
$\Gamma^r_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{r\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma}+\partial_\nu g_{\sigma\mu}-\partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\left(\partial_\mu g_{\nu r}+\partial_\nu g_{r\mu}-\partial_r g_{\mu\nu}\right)$（这里，由于 $g^{r\sigma}$ 仅在 $\sigma=r$ 的时候非零）

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{rr}&=\frac{1}{2}\left(\partial_r g_{rr}+\partial_r g_{rr}-\partial_r g_{rr}\right)=\frac{1}{2}\partial_r\left(1\right)=0\\\Gamma^r_{r\theta}&=\frac{1}{2}\left(\partial_r g_{\theta r}+\partial_\theta g_{rr}-\partial_r g_{r\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(0+0-0\right)=0\\\Gamma^r_{\theta\theta}&=\frac{1}{2}\left(\partial_\theta g_{\theta r}+\partial_\theta g_{r\theta}-\partial_r g_{\theta\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(-2r\right)=-r\end{aligned}$$

2. 对于 $\lambda=\theta$
$\Gamma^\theta_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\theta\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma}+\partial_\nu g_{\sigma\mu}-\partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\left(\partial_\mu g_{\nu r}+\partial_\nu g_{r\mu}-\partial_r g_{\mu\nu}\right)$

$$\begin{aligned}\Gamma^\theta_{rr}&=\frac{1}{2r^2}\left(\partial_r g_{r\theta}+\partial_r g_{\theta t}-\partial_\theta g_{rr}\right)=0\\\Gamma^\theta_{r\theta}&=\frac{1}{2r^2}\left(\partial_r g_{\theta\theta}+\partial_\theta g_{\theta r}-\partial_\theta g_{r\theta}\right)=\frac{1}{2r^2}\partial_\theta\left(r^2\right)=0\\\Gamma^\theta_{\theta\theta}&=\frac{1}{2r^2}\left(\partial_\theta g_{\theta\theta}+\partial_\theta g_{\theta\theta}-\partial_\theta g_{\theta\theta}\right)=\frac{1}{2r^2}\partial_\theta\left(r^2\right)=0\end{aligned}$$

接着我们考虑一个稍微复杂的情况，比如史瓦西度规首先考虑史瓦西度规的线元表示，即
$ds^2 = -\left(c^2 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$
接着我们用 x^0 来表示时间坐标 t，$\left(x^1, x^2, x^3\right)$ 分别代表 (r, θ, ϕ) 接着度规分量 $g_{\mu\nu}$ 和逆 $g^{\mu\nu}$ 分别是

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(c^2 - \frac{2GM}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$
$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(c^2 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

同时我们使用自然单位制，即 $G = c = 1$

$$\Gamma^0_{01} = \frac{M}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$
$$\Gamma^0_{10} = \frac{M}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$
$$\Gamma^1_{00} = \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$
$$\Gamma^1_{11} = -\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$
$$\Gamma^1_{22} = -r\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$
$$\Gamma^1_{33} = -r\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sin^2\theta$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$
$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^3_{23} = \cot\theta$$
$$\Gamma^3_{32} = \cot\theta$$

定义. (M, ∇_a) 上的曲线 $\gamma(t)$ 是测地线，如果其切向量 T^a 满足 $T^b\nabla_b T^a = 0$

参考文献